高二年级 4 月份学情调研

数学参考答案及解析

一、选择题

1. B 【解析】$\dfrac{A_{2\,026}^{2}}{C_{2\,026}^{2}}=\dfrac{2\,026\times2\,025}{\frac{2\,026\times2\,025}{2\times1}}=2\,026\times2\,025\times\dfrac{2}{2\,026\times2\,025}=2$. 故选 B.

2. C 【解析】因为 $f(x)=\sqrt{e^{x}}=e^{\frac{x}{2}}$,所以 $f'(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$,所以 $f'(0)=\frac{1}{2}$,又 $f(0)=1$,所以曲线 $f(x)=\sqrt{e^{x}}$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y-1=\frac{1}{2}(x-0)$,即 $x-2y+2=0$. 故选 C.

3. A 【解析】由 $f(x)=3f'(1)x-2\ln x$,求导得 $f'(x)=3f'(1)-\frac{2}{x}$,则 $f'(1)=3f'(1)-2$,解得 $f'(1)=1$. 故选 A.

4. B 【解析】先将 B,C,D 这三个地标捆绑,再和其他 4 个地标排列,共有 $A_3^3A_5^5=720$ 种. 故选 B.

5. C 【解析】分 3 种情况讨论:①3 本书放在同一个窗口,有 $C_4^1=4$ 种摆放方法;②3 本书放在 2 个窗口,一个窗口放 2 本,另一个窗口放 1 本,有 $C_4^1C_3^1=4\times3=12$ 种摆放方法;③3 本书放在 3 个窗口,每个窗口各放 1 本,有 $C_4^3=4$ 种摆放方法,所以不同的摆放方法共有 $4+12+4=20$ 种. 故选 C.

6. D 【解析】函数 $f(x)=\frac{10|x|\ln|x|}{x^3}$ 的定义域为 $\{x|x\neq0\}$,且 $f(-x)=\frac{10|-x|\ln|-x|}{(-x)^3}=-\frac{10|x|\ln|x|}{x^3}=-f(x)$,所以 $f(x)$ 为奇函数,其图象关于原点对称,排除 B;当 $x>0$ 时,$f(x)=\frac{10x\ln x}{x^3}=\frac{10\ln x}{x^2}$,则 $f'(x)=\frac{10x-20x\ln x}{x^4}=\frac{10(1-2\ln x)}{x^3}$,由 $f'(x)>0$,得 $0<x<\sqrt{e}$;由 $f'(x)<0$,得 $x>\sqrt{e}$,故 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{e})$ 上单调递增,在 $(\sqrt{e},+\infty)$ 上单调递减,排除 C;当 $x>0$ 时,$f(1)=0$,$f(x)_{\max}=f(\sqrt{e})=\frac{10\sqrt{e}\ln\sqrt{e}}{(\sqrt{e})^3}=\frac{5}{e}<2$,排除 A. 故选 D.

7. A 【解析】因为 $f(x)=x^3-4x^2+4x$,所以 $f'(x)=3x^2-8x+4=(3x-2)(x-2)$,令 $f'(x)>0$,得 $x<\frac{2}{3}$ 或 $x>2$;令 $f'(x)<0$,得 $\frac{2}{3}<x<2$,所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$,$(2,+\infty)$ 上单调递增,在 $\left(\frac{2}{3},2\right)$ 上单调递减,所以 $f(x)$ 的极大值为 $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{32}{27}$,极小值为 $f(2)=0$,则当 $x\leqslant\frac{2}{3}$ 时,$f(x)\leqslant\frac{32}{27}$,当 $x>2$ 时,解方程 $f(x)=x$,即 $x^3-4x^2+4x=x$,解得 $x=3$,所以 $f(3)=3$,所以当 $x\leqslant3$ 时,$f(x)\leqslant3$;当 $x>3$ 时,$f(x)>3$. 综上,不等式为 $f(x)\leqslant3$,其解集为 $\{x|x\leqslant3\}$,即 $m=3$. 故选 A.

8. D 【解析】令 $f(x)=e^{x-1}-x$,则 $f'(x)=e^{x-1}-1$,令 $f'(x)<0$,得 $x<1$;令 $f'(x)>0$,得 $x>1$,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,所以 $f\left(\frac{2\,027}{2\,026}\right)>f(1)$,$f\left(\frac{2\,026}{2\,027}\right)>f(1)$,即 $e^{\frac{2\,027}{2\,026}-1}-\frac{2\,027}{2\,026}>0$,$e^{\frac{2\,026}{2\,027}-1}-\frac{2\,026}{2\,027}>0$,得 $e^{\frac{1}{2\,026}}>\frac{2\,027}{2\,026}$,$\frac{1}{e^{\frac{1}{2\,027}}}>\frac{2\,026}{2\,027}$,故 $\frac{2\,027}{2\,026}>e^{\frac{1}{2\,027}}$,所以 $e^{\frac{1}{2\,026}}>\frac{2\,027}{2\,026}>e^{\frac{1}{2\,027}}$,即 $a>b>c$. 故选 D.

二、选择题

9. ACD 【解析】对于 A,由性质 $C_n^m=C_n^{n-m}$,得 $C_{11}^5=C_{11}^6$,故 A 正确;对于 B,$A_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)$,$A_n^{n-m}=n(n-1)\cdots(m+1)$,无法确定 $n-m+1$ 与 $m+1$ 是否相等,故 B 错误;对于 C,将定义 $A_n^m=C_n^mA_m^m$ 中的 m 用 $m-1$ 替换,得 $A_n^{m-1}=C_n^{m-1}A_{m-1}^{m-1}$,故 C 正确;对于 D,$\frac{1}{n-m}A_n^{m+1}=\frac{1}{n-m}\cdot\frac{n!}{(n-m-1)!}=$

$\frac{n!}{(n-m)!}=A_n^m$，故 D 正确. 故选 ACD.

10. ABC 【解析】对于 A，由题意知每人都有 3 种选择，所以四名同学的报名情况共有 3^4 种，故 A 正确；对于 B，若每个项目都有人报名，则必有两名同学报名同一项目，所以报名情况共有 $C_4^2C_3^1A_2^2=36$ 种，故 B 正确；对于 C，四名同学最终只报名了两个项目，可先选出两个项目，报名情况为这两个项目各有两名同学报名，或一名同学报名其中一个，另外三名同学报名另一个项目，所以报名情况共有 $C_3^2(C_4^2+C_4^1A_2^2)=42$ 种，故 C 正确；对于 D，恰有两名同学所报项目相同且只有甲同学一人报名"关怀老人"的情况共有 $C_3^2C_2^1=6$ 种，故 D 错误. 故选 ABC.

11. AD 【解析】对于 A，$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{3+\cos(-x)}=\frac{-\sin x}{3+\cos x}=-\frac{\sin x}{3+\cos x}=-f(x)$，且定义域为 $\mathbf{R}$，所以 $f(x)$ 为奇函数，故 A 正确；对于 B，$f(\pi+x)=\frac{\sin(\pi+x)}{3+\cos(\pi+x)}=\frac{-\sin x}{3-\cos x}=\frac{\sin x}{-3+\cos x}\neq f(x)$，故 B 错误；对于 C，$f(\pi-x)=\frac{\sin(\pi-x)}{3+\cos(\pi-x)}=\frac{\sin x}{3-\cos x}\neq-\frac{\sin x}{3+\cos x}=-f(x)$，故 C 错误；对于 D，$f'(x)=\frac{\cos x(3+\cos x)-\sin x(-\sin x)}{(3+\cos x)^2}=\frac{3\cos x+1}{(3+\cos x)^2}$，当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$3\cos x+1>0$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$单调递增. 故 D 正确. 故选 AD.

三、填空题

12. 2 【解析】由题得 $f'(x)=(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)+(x-1)(x-2)$，则 $f'(3)=(3-1)(3-2)=2$. 故答案为 2.

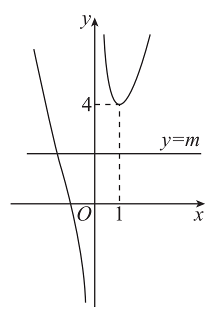
13. 144 【解析】由题意得丙可能是第 4，5，6 名，所以这六名同学的名次情况共有 $C_2^1C_3^1A_4^4=144$ 种. 故答案为 144.

14. 260 【解析】第 1 个灯区有 5 种颜色可选，第 2 个灯区不能与第 1 个灯区同色，有 4 种颜色可选，若第 3 个灯区与第 1 个灯区同色，则只有 1 种颜色可选，此时第 4 个灯区不能与第 1，3 个灯区同色，有 4 种颜色可选；若第 3 个灯区与第 1 个灯区颜色不同，也不能与第 2 个灯区同色，则有 3 种颜色可选，此时第 4 个灯区不能与第 1，3 个灯区同色，有 3 种颜色可选，所以该舞台灯区共有 $5\times4\times(1\times4+3\times3)=260$ 种不同的颜色搭配方案. 故答案为 260.

四、解答题

15. **解**：(1)先排 4 名男生，有 $A_4^4=24$ 种排法，
在 4 名男生产生的空隙中插入 3 名女生，有 $A_5^3=60$ 种排法，
所以女生互不相邻的不同站法总数为 $24\times60=1\,440$种. (5 分)
(2)7 人站成一排有 $A_7^7=5\,040$ 种不同的站法，(6 分)
甲站在排头的站法有 $A_6^6=720$ 种，(7 分)
乙站在排尾的站法有 $A_6^6=720$ 种，(9 分)
甲站在排头且乙站在排尾的站法有 $A_5^5=120$ 种，(11 分)
所以甲不站在排头，乙不站在排尾的不同站法有 $5\,040-720-720+120=3\,720$ 种. (13 分)

16. **解**：(1)因为 $f(x)=\frac{x^3+x+2}{x}=x^2+\frac{2}{x}+1$，$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，
所以 $f'(x)=2x-\frac{2}{x^2}=\frac{2(x^3-1)}{x^2}$，(3 分)
则当 $x<0$ 或 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；
当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，
所以 $f(x)$在$(-\infty,0)$，$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增. (6 分)
(2)$f(x)=x^2+\frac{2}{x}+1$，$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，
当 $x\to-\infty$时，$f(x)\to+\infty$；
当 $x\to0^-$时，$f(x)\to-\infty$；
当 $x\to0^+$时，$f(x)\to+\infty$；
当 $x\to+\infty$时，$f(x)\to+\infty$，(10 分)
又 $f(1)=4$，作出 $f(x)$的大致图象如图所示，



因为关于 x 的方程 $f(x)=m$ 只有 1 个实数解，

所以 $f(x)$ 的图象与直线 $y=m$ 只有 1 个交点，

结合图象可知 $m<4$，

所以实数 m 的取值范围为 $(-\infty,4)$. （15 分）

17. **解**：(1)先从 7 位同学中选出 4 人，有 $C_7^4=35$ 种选法； （2 分）

再将选出的 4 人分配到 4 个项目，要求每个项目至少 1 人，则有 $A_4^4=24$ 种分配方法， （4 分）

所以共有 $35\times24=840$ 种不同的调研安排方案. （6 分）

(2)将甲、乙、丙 3 位同学视为一个整体（一个元素），此时相当于 5 个元素分配到 4 种模型，每种模型至少 1 个元素，

则 5 个元素需分为“2,1,1,1”四组，有 $C_5^2=10$ 种分法； （9 分）

再将这四组对应 4 种模型进行全排列，有 $A_4^4=24$ 种方法， （12 分）

所以若 7 位同学同时参与调研，其中的甲、乙、丙 3 位同学调研同一项目，共有 $10\times24=240$ 种不同的安排方案. （15 分）

18. **解**：(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=x-3+\dfrac{1}{x+1}$，$x\neq-1$，

则 $f'(x)=1-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$， （1 分）

令 $f'(x)<0$，得 $-2<x<-1$ 或 $-1<x<0$；

令 $f'(x)>0$，得 $x<-2$ 或 $x>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递增，在 $(-2,-1)$，$(-1,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增， （3 分）

所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(-2)=-6$，极小值为 $f(0)=-2$. （4 分）

(2)由 $3x-2\geqslant f(x)$，得 $3x-2\geqslant ax-3+\dfrac{1}{x+1}$，

化简得 $(3-a)x-\dfrac{1}{x+1}+1\geqslant0$，

设 $g(x)=(3-a)x-\dfrac{1}{x+1}+1$，$x\in[0,+\infty)$，

则 $g'(x)=3-a+\dfrac{1}{(x+1)^2}$， （6 分）

当 $3-a\geqslant0$，即 $a\leqslant3$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

所以 $g(x)\geqslant g(0)=0$，符合题意； （7 分）

当 $3-a<0$，即 $a>3$ 时，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to-\infty$，不满足 $g(x)\geqslant0$ 对 $\forall x\in[0,+\infty)$ 恒成立，不符合题意. （8 分）

综上，a 的取值范围为 $(-\infty,3]$. （9 分）

(3)若 $a=3$，

则由(2)得当 $0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$3x-2\geqslant f(x)$，

要证 $\tan x>f(x)$，可证 $\tan x>3x-2$. （10 分）

令 $h(x)=\tan x-3x+2$，$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

则 $h'(x)=\dfrac{1}{\cos^2x}-3=\dfrac{1-3\cos^2x}{\cos^2x}$

$=\dfrac{(1+\sqrt{3}\cos x)(1-\sqrt{3}\cos x)}{\cos^2x}$，

令 $h'(x)=0$，得 $1-\sqrt{3}\cos x=0$，则 $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$， （12 分）

设 $\cos x_0=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$x_0\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

则当 $0\leqslant x<x_0$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；

当 $x_0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

所以 $h(x)\geqslant h(x_0)=\tan x_0-3x_0+2$， （14 分）

因为 $\cos x_0=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$x_0\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

所以 $\tan x_0=\dfrac{\sqrt{1-\cos^2x_0}}{\cos x_0}=\sqrt{2}<\sqrt{3}$，

则 $0\leqslant x_0<\dfrac{\pi}{3}$， （15 分）

所以 $h(x_0)>\sqrt{2}-3\times\dfrac{\pi}{3}+2=\sqrt{2}-\pi+2>0$，

则 $h(x)>0$，即 $\tan x-3x+2>0$，

所以 $\tan x>3x-2$ 得证，

所以当 $0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\tan x>f(x)$. （17 分）

19. **解**：(1)因为 $f(x)=ax^3+2x^2+2x$，

所以 $f'(x)=3ax^2+4x+2$， （1 分）

因为 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极值点，

所以 $f'(1)=3a+4+2=3a+6=0$，解得 $a=-2$. （3 分）

当 $a=-2$ 时，$f'(x)=-6x^2+4x+2$

$=-2(3x+1)(x-1)$,

令 $f'(x)<0$,得 $x<-\frac{1}{3}$或 $x>1$;

令 $f'(x)>0$,得$-\frac{1}{3}<x<1$,

所以 $f(x)$在$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$,$(1,+\infty)$上单调递减,在$\left(-\frac{1}{3},1\right)$上单调递增,

则 $x=1$ 为 $f(x)$的极大值点,符合题意,

所以 $a=-2$. (4 分)

(2)由(1)得 $f(x)=-2x^3+2x^2+2x$,

$f'(x)=-6x^2+4x+2$,

设切点坐标为$(x_0,f(x_0))$,

则 $f'(x_0)=-6x_0^2+4x_0+2$,

所以切线方程为 $y-f(x_0)=(-6x_0^2+4x_0+2)(x-x_0)$, (5 分)

又切线过点$(0,0)$,

所以 $0-f(x_0)=(-6x_0^2+4x_0+2)(0-x_0)$,

则 $2x_0^3-2x_0^2-2x_0=-x_0(-6x_0^2+4x_0+2)$,

化简得 $2x_0^3-x_0^2=0$,即 $x_0^2(2x_0-1)=0$,

解得 $x_0=0$ 或 $x_0=\frac{1}{2}$, (7 分)

当 $x_0=0$ 时,$f(x_0)=0$,$f'(x_0)=2$,

则切线方程为 $y-0=2(x-0)$,

即 $2x-y=0$; (8 分)

当 $x_0=\frac{1}{2}$时,$f(x_0)=\frac{5}{4}$,$f'(x_0)=\frac{5}{2}$,

则切线方程为 $y-\frac{5}{4}=\frac{5}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)$,

即 $5x-2y=0$. (9 分)

综上,切线方程为 $2x-y=0$ 或 $5x-2y=0$. (10 分)

(3)由(2)得,曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线方程为 $y-f(x_0)=(-6x_0^2+4x_0+2)(x-x_0)$,

因为切线过点$(0,m)$,

所以 $m-f(x_0)=-x_0(-6x_0^2+4x_0+2)$,

则 $m-(-2x_0^3+2x_0^2+2x_0)=-x_0(-6x_0^2+4x_0+2)$,

化简得 $m=4x_0^3-2x_0^2$. (12 分)

设 $g(x)=4x^3-2x^2$,

则 $g'(x)=12x^2-4x=4x(3x-1)$,

当 $x<0$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增;

当 $0<x<\frac{1}{3}$时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减;

当 $x>\frac{1}{3}$时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增,

所以 $g(x)_{极大值}=g(0)=0$,$g(x)_{极小值}=g\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{27}$. (14 分)

数形结合易知,当 $m<-\frac{2}{27}$或 $m>0$ 时,$g(x)$的图象与直线 $y=m$ 有且仅有 1 个交点;

当 $m=-\frac{2}{27}$或 $m=0$ 时,$g(x)$的图象与直线 $y=m$ 有 2 个交点;

当$-\frac{2}{27}<m<0$ 时,$g(x)$的图象与直线 $y=m$ 有 3 个交点, (16 分)

所以当 $m<-\frac{2}{27}$或 $m>0$ 时,有 1 条切线;

当 $m=-\frac{2}{27}$或 $m=0$ 时,有 2 条切线;

当$-\frac{2}{27}<m<0$ 时,有 3 条切线. (17 分)